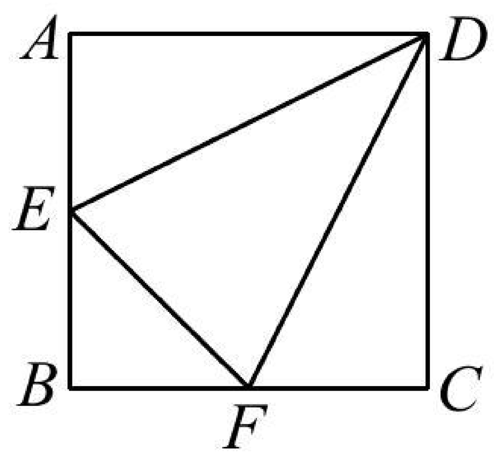
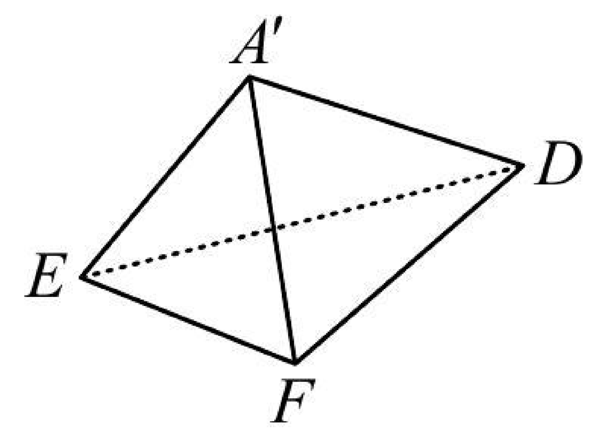
# 第 3 节  外接球问题（★★★☆）

**强化训练**

1.（2023 •长沙模拟 •★★）如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，点 $E$，$F$ 分别是边 $AB$，$BC$ 的中点，将 $\Delta AED$，$\Delta EBF$，$\Delta FCD$ 分别沿 $DE$，$EF$，$FD$ 折起，使 $A$，$B$，$C$ 三点重合于 $A'$，若四面体 $A'EFD$ 的四个顶点在同一个球面上，则该球的半径为_____.



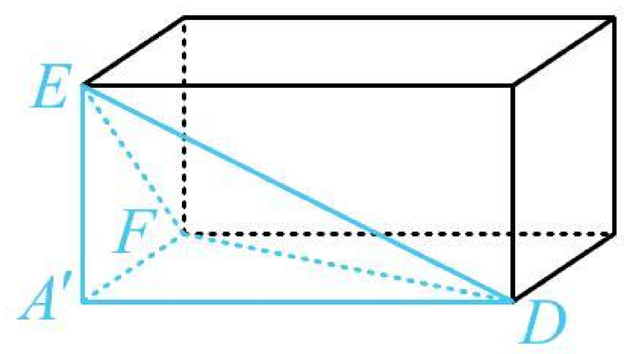




答案：$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

解析：由折叠过程可知折叠后的四面体中，$A'E$，$A'F$，$A'D$ 两两垂直，外接球属于长方体模型，

如图，由题意，$A'E = A'F = 1$，$A'D = 2$，所以四面体 $A'EFD$ 的外接球半径 $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{A'E^2 + A'F^2 + A'D^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.





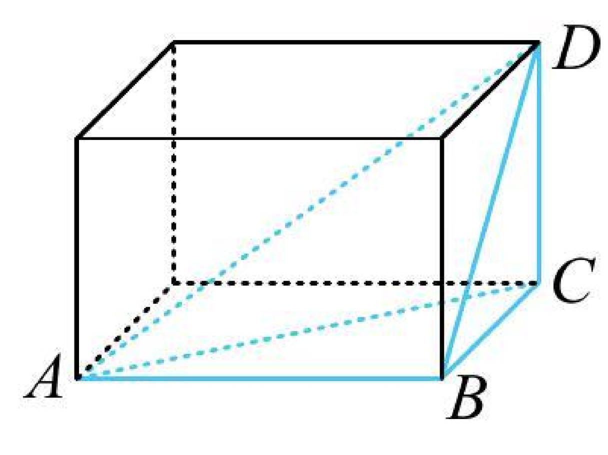

2.（★★）已知 $A$，$B$，$C$，$D$ 在同一球面上，$AB \perp$ 平面 $BCD$，$BC \perp CD$，若 $AB = 3$，$AC = \sqrt{13}$，$BD = \sqrt{7}$，则该球的体积是_____.

答案：$\dfrac{32\pi}{3}$

解析：由$\begin{cases} BC \perp CD \\ AB \perp 平面BCD \end{cases}$可发现有直角三角形和过其顶点的垂线段，故可按长方体模型处理，

如图，$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2$，$CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{3}$，

所以外接球的半径 $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2 + CD^2} = 2$，体积 $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{32\pi}{3}$.




3.（2022 • 安徽模拟 • ★★★）在正三棱锥 $S - ABC$ 中，$AB = BC = CA = 6$，$D$ 是 $SA$ 的中点，若 $SB \perp CD$，则该三棱锥的外接球的表面积是_____.

答案：$54\pi$

解析：$SB\perp CD$ 怎么翻译？若知道正三棱锥对棱垂直的性质，则可结合它推出线面垂直，下面先证明一下，如图 1，取 $AC$ 中点 $E$，连接 $SE$，$BE$，则 $SE\perp AC$， $BE\perp AC$，所以 $AC\perp$ 平面 $SBE$，故 $SB\perp AC$，又 $SB\perp CD$，所以 $SB\perp$ 平面 $SAC$，故 $SB\perp SA$，而正三棱锥三个侧面全等，所以 $SA$，$SB$，$SC$ 两两垂直，有共顶点的两两垂直的棱，可按长方体模型处理，因为 $AB=BC=CA=6$，所以 $SA=SB=SC=3\sqrt{2}$，

如图 2，外接球半径 $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2+SB^2+SC^2}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$，所以外接球的表面积 $S=4\pi R^2=54\pi$.

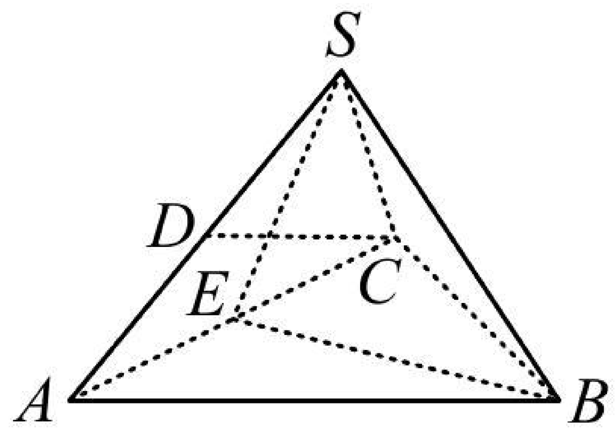


图1

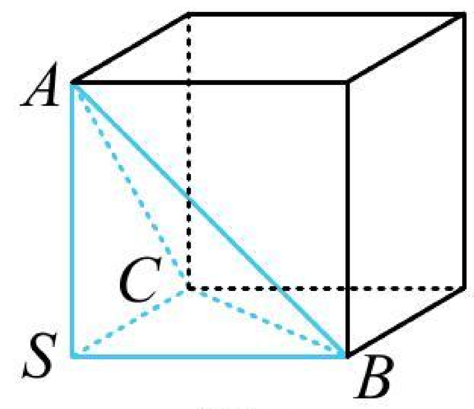


图2

【反思】①本题用到了一个比较好的性质：正三棱锥的相对棱垂直，值得熟悉；②有时模型会隐藏在条件中，需要我们用所给条件作出一些推理才能发现模型特征.

4．（2023•全国乙卷•★★）已知点 $S$，$A$，$B$，$C$ 均在半径为 2 的球面上，$\Delta ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，$SA\perp$ 平面 $ABC$，则 $SA=$_____.

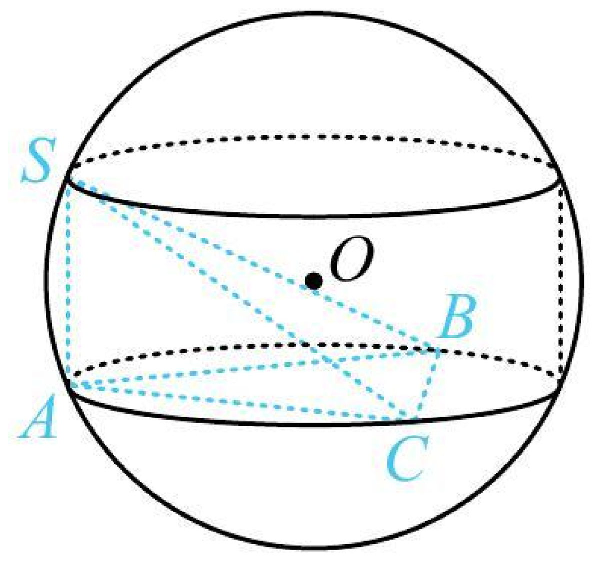
答案：2

解析：有线面垂直，且 $\Delta ABC$ 是等边三角形，属外接球的圆柱模型，核心方程是 $r^2+(\dfrac{h}{2})^2=R^2$，



如图，圆柱的高 $h=SA$，底面半径 $r$ 即为 $\Delta ABC$ 的外接圆半径，所以 $r=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=\sqrt{3}$，

由题意，球的半径 $R=2$，因为 $r^2+(\dfrac{h}{2})^2=R^2$，所以 $3+(\dfrac{h}{2})^2=4$，解得：$h=2$，故 $SA=2$.




5．（2023•河南模拟•★★★）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\Delta ABC$ 是边长为 6 的等边三角形，$D$ 是 $AB$ 的中点，$DC_1$ 与平面 $ABC$ 所成角的正切值为 1，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为（　　）

（A）$75\pi$　　（B）$68\pi$　　（C）$60\pi$　　（D）$48\pi$

答案：A

解析：直三棱柱只有底面边长，没有高，但高可求，故先由已知条件求高，

如图 1，因为 $\Delta ABC$ 是边长为 6 的正三角形，所以 $CD=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，

又 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $CC_1\perp$ 平面 $ABC$，所以 $\angle CDC_1$ 即为直线 $DC_1$ 与平面 $ABC$ 所成的角，

从而 $\tan\angle CDC_1=\dfrac{CC_1}{CD}=1$，故 $CC_1=CD=3\sqrt{3}$，

直三棱柱外接球问题可按内容提要第 2 点②的圆柱模型处理，如图 2，模型的核心方程是 $r^2+(\frac{h}{2})^2=R^2$，

由题意，$\Delta ABC$ 的外接圆半径 $r=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=2\sqrt{3}$，圆柱的高 $h=CC_1=3\sqrt{3}$，

所以 $R=\sqrt{r^2+(\frac{h}{2})^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，故外接球的表面积 $S=4\pi R^2=75\pi$.

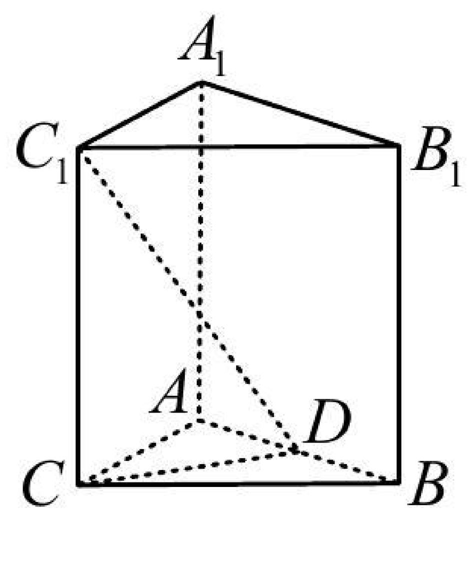


图1

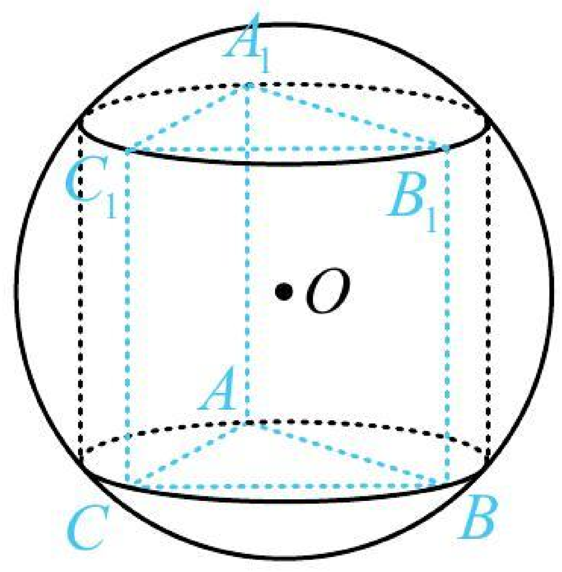


图2

6.（2022 • 福建模拟 • ★★★）若正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各顶点都在表面积为 $65\pi$ 的球 $O$ 的球面上，$AB=4\sqrt{3}$，$A_1B_1=2\sqrt{3}$，则正三棱台的高为（　　）

（A）$\sqrt{3}$　　（B）4　　（C）$\sqrt{3}$ 或 3　　（D）3 或 4

**答案：** D

**解析：** 球 $O$ 的表面积 $S=4\pi R^2=65\pi\Rightarrow R=\frac{\sqrt{65}}{2}$，$A_1B_1=2\sqrt{3}\Rightarrow$ 上底面外接圆半径 $IA_1=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=2$，



$AB=4\sqrt{3}\Rightarrow$ 下底面外接圆半径 $KA=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=4$，

高没定，无法判断球心在棱台内部还是外部，故需讨论，

若为图 1，则 $IK=OI-OK=\sqrt{OA_1^2-IA_1^2}-\sqrt{OA^2-KA^2}=\sqrt{\frac{65}{4}-4}-\sqrt{\frac{65}{4}-16}=3$；

若为图 2，则 $IK=OI+OK=\sqrt{OA_1^2-IA_1^2}+\sqrt{OA^2-KA^2}=\sqrt{\frac{65}{4}-4}+\sqrt{\frac{65}{4}-16}=4$；

综上所述，正三棱台的高为 3 或 4.

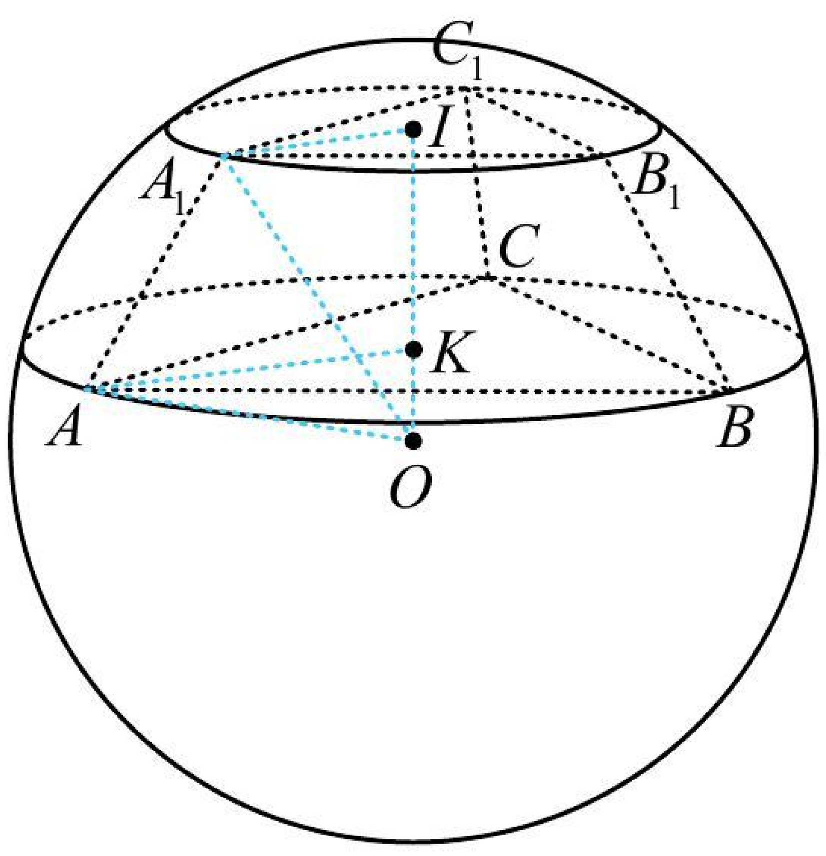


图1

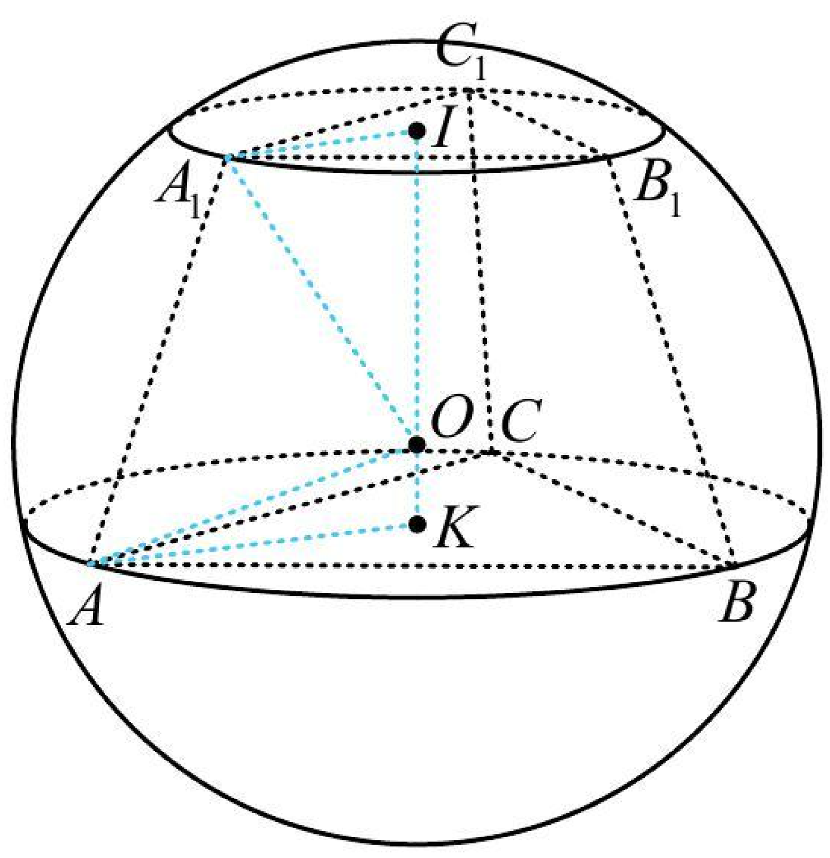


图2

7.（2018 • 新课标III卷 • ★★★）设 $A$，$B$，$C$，$D$ 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，$\Delta ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为（　　）

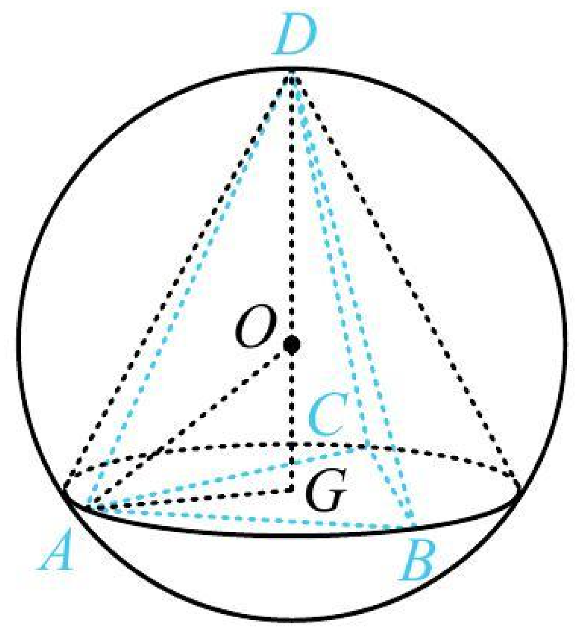
（A）$12\sqrt{3}$　　（B）$18\sqrt{3}$　　（C）$24\sqrt{3}$　　（D）$54\sqrt{3}$

**答案：** B

**解析：** 三棱锥的底面 $\Delta ABC$ 不变，故高最大时体积就最大，此时三棱锥 $D-ABC$ 应为如图所示的正三棱锥，正三棱锥可按圆锥模型处理，核心是到 $\Delta AOG$ 中用勾股定理计算有关量，下面先算 $\Delta ABC$ 的外接圆半径 $r$，

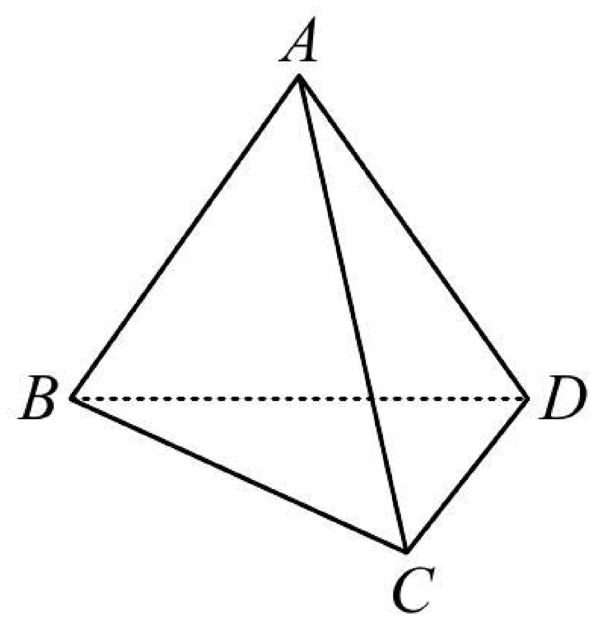
设 $\Delta ABC$ 边长为 $a$，则 $\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}\Rightarrow a=6$，由正弦定理，$\frac{6}{\sin 60^\circ}=2r\Rightarrow r=2\sqrt{3}\Rightarrow AG=2\sqrt{3}$，

又由题意，$OA=OD=4$，所以 $OG=\sqrt{OA^2-AG^2}=2$，故 $(V_{D-ABC})_{\max}=\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times(2+4)=18\sqrt{3}$.




8.（2023・贵阳模拟・★★★）如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 $BCD$，$\Delta BCD$ 是边长为 6 的等边三角形，$AB=AD=3\sqrt{3}$，则该几何体的外接球表面积为_____.






**答案：** $\frac{105\pi}{2}$

**解析：** 没有线面垂直、侧棱长相等，不便套用模型，注意到 $\Delta BCD$ 的外心好找，故考虑内容提要中的通法，如图，过 $\Delta BCD$ 的外心 $G$ 作垂直于平面 $BCD$ 的直线，则球心 $O$ 在该直线上，取 $BD$ 中点 $I$，连接 $AI$，

因为 $AB=AD=3\sqrt{3}$，$BI=3$，所以 $AI\perp BD$，且 $AI=\sqrt{AB^2-BI^2}=3\sqrt{2}$，

结合平面 $ABD\perp$ 平面 $BCD$ 可得 $AI\perp$ 平面 $BCD$，所以 $AI/\!/OG$，

作 $OH\perp AI$ 于 $H$，则 $OH=IG=\frac{1}{3}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

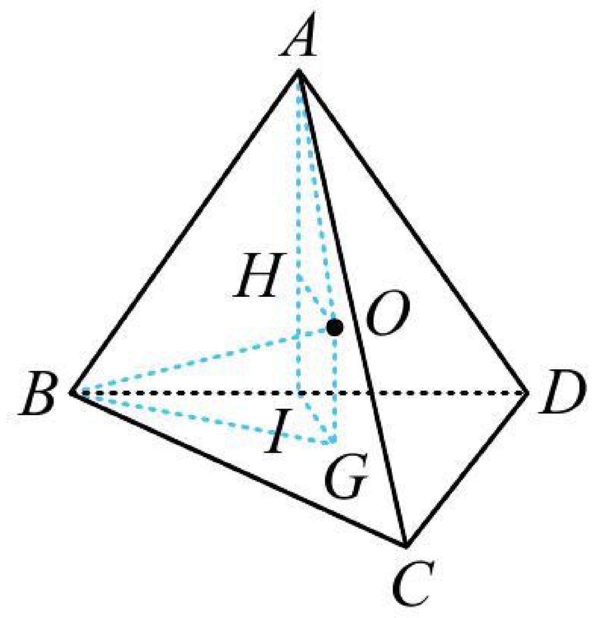
要求外接球半径，可先设 $OG$，利用 $OA=OB$ 来建立方程，$OA$，$OB$ 分别在 $\Delta AHO$ 和 $\Delta BGO$ 中计算，

设 $OG=x$，则 $HI=x$，$AH=AI-HI=3\sqrt{2}-x$，所以 $OA=\sqrt{AH^2+OH^2}=\sqrt{(3\sqrt{2}-x)^2+3}$，

又 $BG=\frac{2}{3}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，所以 $OB=\sqrt{BG^2+OG^2}=\sqrt{12+x^2}$，

由 $OA=OB$ 可得 $\sqrt{(3\sqrt{2}-x)^2+3}=\sqrt{12+x^2}$，解得：$x=\frac{3}{2\sqrt{2}}$，

所以球 $O$ 的半径 $R=OB=\sqrt{12+x^2}=\sqrt{\frac{105}{8}}$，故球 $O$ 的表面积 $S=4\pi R^2=\frac{105\pi}{2}$.




【反思】发现该题条件在四大模型中没有对应的吧？这种情况常用通法处理. 另外，当题干出现面面垂直时，使用通法会比较方便，因为过外心的垂线容易作出与分析.

9.（2023•山东模拟•★★★★）已知三棱锥$S-ABC$的所有顶点都在球$O$的球面上，$\Delta ABC$是等腰三角形，$\angle BAC=120^{\circ}$，$BC=\sqrt{3}$，且球$O$的直径$SA=4$，则该三棱锥的体积为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**答案**：C

**解析**：分析发现本题不能套用模型，故用通法，给了直径为$SA$，球心$O$即为$SA$中点，连接$O$与$\Delta ABC$的外心即为面$ABC$的垂线，

如图1，设$\Delta ABC$的外心为$O_1$，外接圆半径为$r$，则$\begin{cases}\angle BAC=120^{\circ}\\ BC=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=2=2r\Rightarrow r=1$，

球$O$的直径$SA=4\Rightarrow$半径$R=2$，所以球心$O$到平面$ABC$的距离$OO_1=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{3}$，



又$O$是$SA$的中点，所以点$S$到平面$ABC$的距离$d=2OO_1=2\sqrt{3}$，算体积还差$\Delta ABC$的面积，

如图2，设$D$为$BC$中点，则$AD\perp BC$，且$\angle ABD=30^{\circ}$，所以$AD=BD\cdot\tan 30^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{2}$，

从而$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，故$V_{S-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot d=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$.

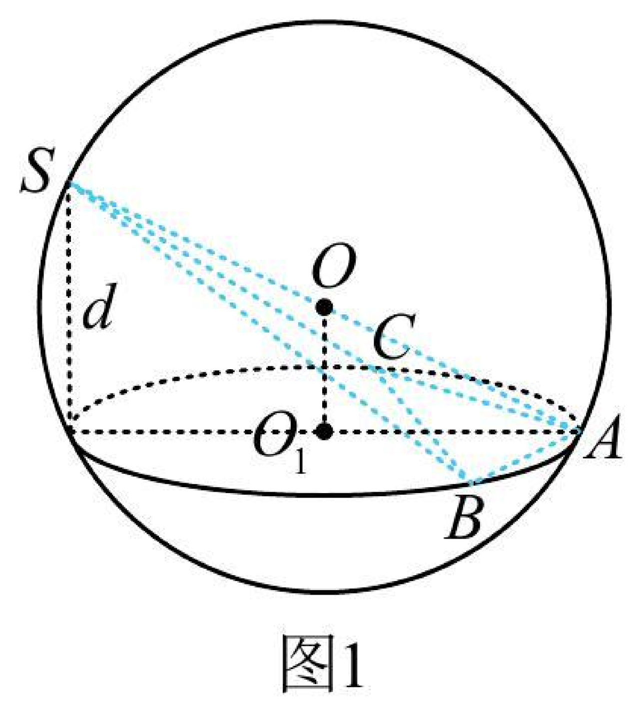



图1

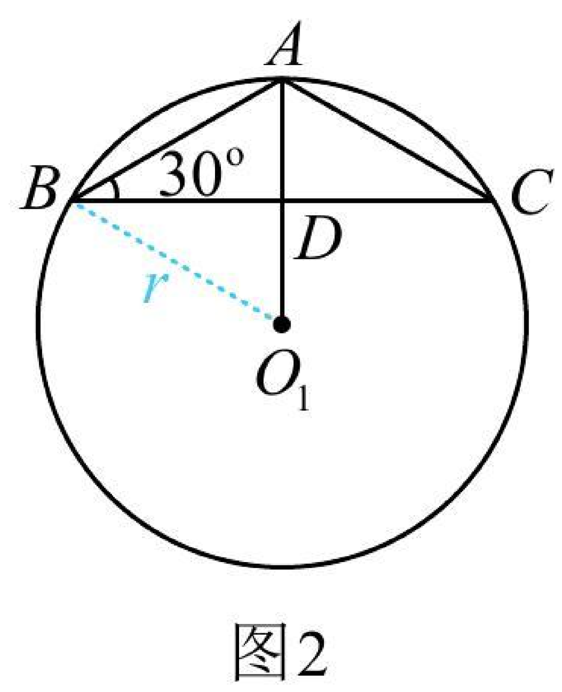



图2

10.（★★★★）已知三棱锥$S-ABC$的底面是等边三角形，且$SA=SB=SC=\sqrt{6}$，则当三棱锥$S-ABC$的体积最大时，其外接球的表面积为（　　）

（A）$9\pi$　　（B）$12\pi$　　（C）$18\pi$　　（D）$27\pi$

**答案**：C

**解析**：先看何时$V_{S-ABC}$最大，已知侧棱长，不妨设底面边长为变量，到侧棱与高构成的截面中求高，

由题意，$S-ABC$是正三棱锥，如图1，设其底面中心为$O_1$，底面边长为$a$，则$AO_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，

$SO_1=\sqrt{SA^2-AO_1^2}=\sqrt{6-\dfrac{a^2}{3}}$，所以 $V_{S-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}a^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{6-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{\sqrt{a^4(18-a^2)}}{12}$ ①，

由 $0<AO_1<SA$ 可得 $0<\dfrac{\sqrt{3}}{3}a<\sqrt{6}$，所以 $0<a<3\sqrt{2}$，观察式①发现将 $a^2$ 换元，研究根号内的最值即可，

令 $t=a^2$，则 $0<t<18$，且 $V_{S-ABC}=\dfrac{\sqrt{t^2(18-t)}}{12}$，设 $f(t)=t^2(18-t)(0<t<18)$，则 $f'(t)=3t(12-t)$，

所以 $f'(t)>0\Leftrightarrow 0<t<12$， $f'(t)<0\Leftrightarrow 12<t<18$，故 $f(t)$ 在 $(0,12)$ 上↗，在 $(12,18)$ 上↘，

所以当 $t=12$ 时， $f(t)$ 取得最大值，故当 $V_{S-ABC}$ 最大时， $a=2\sqrt{3}$， $AO_1=2$， $SO_1=\sqrt{2}$，

由 $SA=SB=SC$ 识别出可用内容提要第 3 点的圆锥模型处理，如图 2，只需到 $\Delta AOO_1$ 中由勾股定理求 $R$，

设外接球半径为 $R$，则 $OO_1=|SO_1-SO|=|\sqrt{2}-R|$，在 $\Delta AOO_1$ 中， $OO_1^2+AO_1^2=OA^2$，

所以 $|\sqrt{2}-R|^2+4=R^2$，解得： $R=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，故外接球的表面积 $S=4\pi R^2=18\pi$.

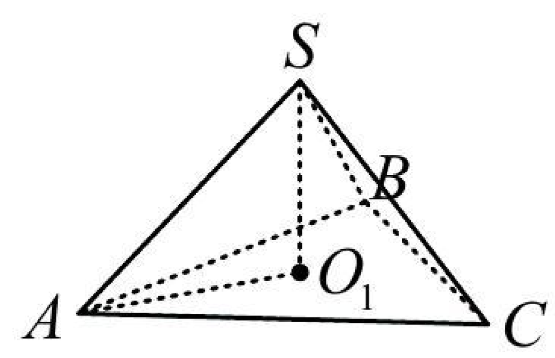


图1

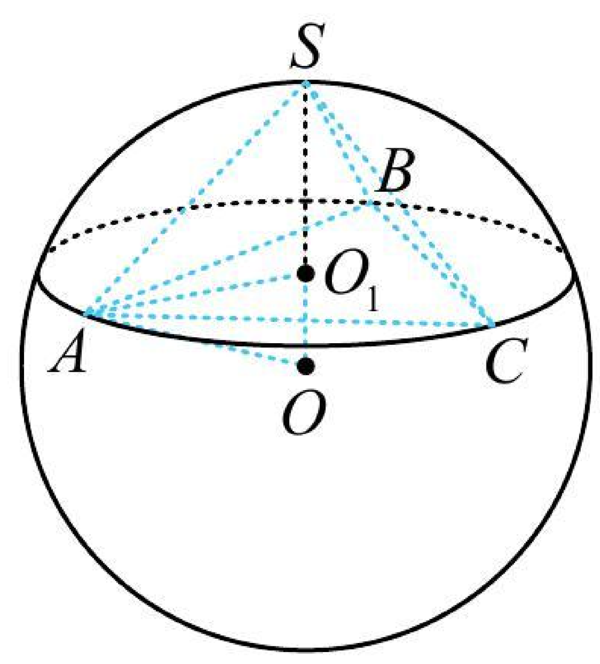


图2